

una versió p -àdica de la funció zeta. A partir d'aquí, i malgrat això, tenim l'esperança de trobar les tecles que posin en marxa la maquinària dels sistemes d'Euler [1] per demostrar també la part (\geq). En casos favorables, aquesta maquinària no només demostra (\geq) sinó que també dóna com a resultat que $E(K)$ i $\text{Sel}_p(E/K)$ són essencialment el mateix grup, tal com esperàvem.

Els nostres experiments (sí, podem calcular aquests punts numèricament, tot un luxe en el nostre camp) ens indiquen que aquest mètode només és capaç de proporcionar com a molt dos elements independents $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$.

Durant dècades només disposàvem de la teoria de la multiplicació complexa, que com a màxim produïa un únic punt no trivial i per a una col·lecció molt més limitada de cossos, així que per a nosaltres és un gran pas cap endavant poder cobrir una classe molt més àmplia d'extensions de \mathbb{Q} i trobar resultats sobre la conjectura en situacions de rang 2!

Referències

[1] M. Bertolini, F. Castellà, H. Darmon, S. Dasgupta, K. Prasanna, V. Rotger, « p -adic L -functions and Euler systems: a tale in two trilogies». Proceedings of the EPSRC Durham Symposium on *Automorphic forms*

and Galois representations, London Math. Society Lecture Notes **414**, (2014), 52–101.

- [2] J. Coates and A. Wiles, «Explicit reciprocity laws». *Astérisque*, **41-42**, Soc. Math. France, Paris, 1977.
- [3] H. Darmon and V. Rotger, «Diagonal cycles and Euler systems II: the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for Hasse-Weil-Artin L -series», pendent de publicar al *Journal of the American Mathematical Society*.
- [4] H. Darmon, «Heegner points, Stark-Heegner points, and values of L -series», *International Congress of Mathematicians II*, 313–345, European Math. Soc., Zurich, 2006.
- [5] B. Gross and D. Zagier, «Heegner points and derivatives of L -series», *Inventiones Mathematicae* **84** (1986), 225-320.
- [6] K. Kato, « p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques III». *Astérisque*, **295**(9) (2004), 117–290.
- [7] V.A. Kolyvagin, «Finiteness of $E(\mathbb{Q})$ and $\text{LLI}(E, \mathbb{Q})$ for a subclass of Weil curves». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **52**(3) (1988), 670–671.

Víctor Rotger
Universitat Politècnica de Catalunya

Fotografia matemàtica. Vint anys mirant el món amb ulls matemàtics

Aquest mes d'abril del 2016 l'Associació de Barcelona per a l'Ensenyament i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM) ha estat reconeguda amb el premi Matemàtiques i Societat 2016, concedit per la Fundació Ferran Sunyer i Balaguer de l'Institut d'Estudis Catalans a la sèrie de Concursos de Fotografia Matemàtica que organitzem des de l'any 2000 «com una eina per interessar els alumnes a aprofundir en les matemàtiques i saber-les relacionar amb altres aspectes de la vida quotidiana».

Aquest guardó és un reconeixement compartit entre professorat, alumnat, pares i mares, personal no docent, equips directius i societat

en general, que d'una manera o altra s'han implicat a tenir una mirada matemàtica amable del món que ens envolta; és també un reconeixement a l'esforç de totes les entitats que treballen amb la fotografia matemàtica com a element dinamitzador.

Ara fa ja més de vint anys que es van començar a convocar els primers concursos de fotografia matemàtica als instituts de Cardedeu, Canovelles i la Garriga. Aquells primers concursos van ser el resultat de la iniciativa de tres departaments didàctics de matemàtiques amics que compartíem la il·lusió per millorar la manera d'ensenyar les matemàtiques a fi

de fer l'assignatura més propera als nostres estudiants. En aquell temps, quan dèiem a classe «heu de fer una fotografia matemàtica», tothom es quedava estranyat i es preguntava: què és una fotografia matemàtica? Ningú no ho entenia, ningú no s'ho imaginava, calia explicar-ho molt bé i així i tot abundaven les fotografies de calculadores i de llibretes amb operacions o lletres «x».

Era l'època dels rodets de cel·luloide i el revelat en laboratori. Fer fotos no era barat, calia tenir una càmera digna, comprar el rodet i pagar el revelat i les còpies. Aconseguir una participació de quaranta o cinquanta fotografies en un institut era gairebé impensable. L'any 2000, en el context de l'organització de les activitats per a l'Any Internacional de les Matemàtiques, la modesta proposta dels tres instituts del Vallès es va encarregar a la jove ABEAM (Associació de Barcelona per a l'Ensenyament i l'Aprenentatge de les Matemàtiques) gràcies a l'impuls de la presidència d'aquella època. Des d'un principi es va pensar a mantenir una estructura de concurs de centre. La idea era ajudar-los a dinamitzar les activitats internes amb una proposta que sabíem que havia funcionat bé als tres instituts pioners. La manera de lligar-ho tot era constituir un concurs de concursos amb una proposta concreta per als centres participants. En la primera edició n'hi va haver una participació de vint! Tot un èxit. Les imatges eren en format paper i es va preparar una exposició itinerant amb les fotografies enganxades sobre cartolines plastificades.



Quan va arribar el *boom* digital els eslògans «Participar-hi és gratis», «Només et cal moure un dit» «Fes el teu clic» van començar a donar resultats. Els centres implicats anaven augmentant i la participació a cada centre també. Era possible aconseguir cent o dues-centes instantànies en un centre. La idea original de dinamitzar els centres i ajudar a oferir

una visió oberta i amigable de les matemàtiques començava a emergir. Pel que fa al concurs de concursos organitzat per l'associació, la possibilitat de projectar les fotografies mentre es lliuraven els premis va convertir la cerimònia en un espectacle atractiu en si mateix. Els assistents passaven una bona estona veient les ocurrencies sovint força divertides dels finalistes. Aquest acte-espectacle ha anat evolucionant fins a la iniciativa que celebrem actualment al CosmoCaixa, en què cada fotografia pren vida.

Ara, gairebé vint anys després d'aquells esforços per explicar què és una fotografia matemàtica, ja ningú no ho dubta, tothom ho té incorporat. Tothom sap què és una fotografia matemàtica i tothom es veu capaç de fer-ne una, des de l'alumne més distret fins al més brillant. Actualment, el concurs de fotografia d'ABEAM és un entramat de més de dos-cents concursos organitzats en diferents centres en què participen, d'una manera o una altra, més de 26.000 estudiants.

D'altra banda, amb el desenvolupament tecnològic actual i la visió d'una didàctica molt vinculada a la vida real, estem modernitzant i revitalitzant l'ús de la fotografia matemàtica a l'aula.

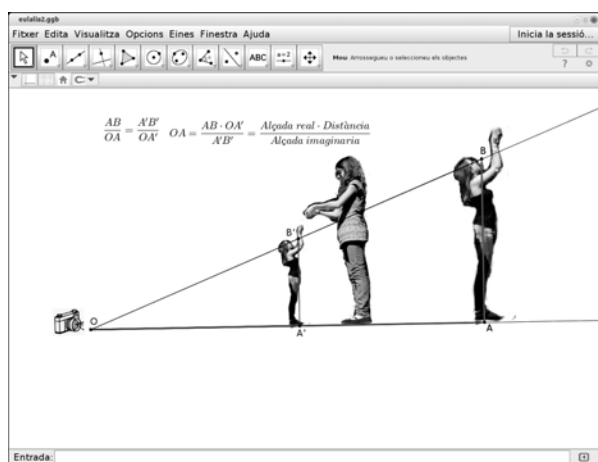
La fotografia s'ha convertit en l'activitat didàctica en si mateixa i amb la qual podem plantejar a l'alumnat nous reptes. Ara és possible, per exemple, treballar un contingut didàctic a partir de les fotografies dels propis alumnes (fins i tot fotos fetes amb els telèfons mòbils).

La fotografia es converteix en la finestra de la matemàtica en el món real, útil en l'activitat diària a classe, una activitat de la qual tot l'alumnat pot participar i permet que cada estudiant desenvolupi les capacitats matemàtiques a partir de la seva pròpia creativitat.

A més, la fotografia ha deixat de ser un ésser inert. Eines com GeoGebra, fulls de càlcul o els llenguatges de programació ens permeten donar vida a les fotografies i esbrinar quina és la matemàtica implícita que hi ha al darrere.

El grup de fotografia matemàtica ABEAM ha preparat diferents exemples d'activitats d'aula que es poden fer a partir de les fotografies del concurs i que es poden trobar al web <http://www.fotografiamatematica.cat>.

Una de les preocupacions del grup de fotografia matemàtica ha estat no mostrar-se com un concurs limitat a les comarques de Barcelona. Estem oberts a centres de qualsevol lloc. Així doncs, hi ha participació a Lleida, Tarragona, Girona, Comunitat Valenciana i fins i tot a la Catalunya Nord. A mesura que l'activitat de fotografia matemàtica s'ha anat consolidant han aparegut necessitats que no estaven ateses. D'una banda, la participació de manera individual i, de l'altra, la participació en l'àmbit universitari. Aquestes necessitats han permès l'aparició d'altres fantàstiques iniciatives que les cobreixen i que es complementen entre si.



Des del curs 2009-2010, ADEMGÍ convoca el Concurs de Fotografia sobre les «matemàtiques en el nostre món». I tal com diuen en les bases, «l'objectiu és mostrar aquest univers tan abstracte i tan real, a la vegada, de les matemàtiques, i deixar palès que aquestes estan immerses en la realitat que ens envolta». La participació en aquest concurs, a diferència del d'ABEAM, és de tipus individual, per la qual cosa qualsevol estudiant o professor hi pot participar sense la necessitat de passar per un concurs previ al seu centre. Aquest tret diferencial fa que hi hagi també participants d'arreu de Catalunya. Tot i que ADEMGÍ és una associació d'àmbit gironí, darrerament han tingut més participants de fora. Sobretot de Barcelona i Girona, però també de Tarragona. Tota la informació sobre les bases i la manera de participar-hi es pot trobar a <http://ademgi.feemcat.org/concursdefotografia>. La participació ha variat en les diferents edicions al voltant de les dues-centes fotografies entre les tres categories, infantil (primària), júnior

(secundària) i sènior (estudiants de postblli-gatori, universitaris i professors). Una de les virtuts diferencials de l'activitat d'ADEMGÍ és la necessitat per part dels participants de justificar i explicar en deu línies el procés d'execució de la fotografia i la interpretació del contingut matemàtic.

Aquest és un aspecte important de la fotografia matemàtica, ja que en una visió pitagòrica del món «tot és nombre», qualsevol fotografia pot ser matemàtica. Què diferencia una fotografia matemàtica d'una no matemàtica? És clar que l'única diferència és la intenció a l'hora de fer-la, i aquesta intenció ha de quedar clara. O bé en el títol o bé en una petita ressenya.

Des del 2009, la Universitat de Lleida ha omplert també aquest espai de participació individual. El concurs FotoMath, que organitza de manera bianual, «va néixer amb l'objectiu de fer palesa la presència de les matemàtiques en la vida quotidiana, així com d'animar a la recerca, la creativitat i la divulgació d'aquesta ciència». Podeu trobar tota la informació sobre el concurs al web www.fotomath.udl.ca. Aquest concurs ha tingut molta acceptació pel fet diferencial d'haver de penjar la fotografia per participar-hi i quedar visible de manera automàtica en una exposició virtual en el propi web. El participant pot anar veient les fotos dels seus «rivals» i gaudir de l'experiència compartida de les fotografies. També organitzen una exposició amb les fotografies impreses.

Des de Tarragona també ha sorgit una iniciativa amb un toc especial. El Concurs de Fotografia Matemàtica Urbana de Reus, organitzat per APMCM i celebrat el 2015, fa un altre pas de rosca en la mirada matemàtica. Els participants tenien un temps determinat per enviar des del mateix telèfon mòbil les fotografies matemàtiques mentre descobrien els racons matemàtics de la ciutat de Reus. Les rajoles numerades de la plaça del Mercadal, el rellotge de sol de l'avinguda Bellissens o l'escultura de Gaudí nen al carrer de l'Amargura van cobrar vida matemàtica en els ulls dels participants. Aquesta iniciativa tan interessant va culminar amb una exposició a la biblioteca Xavier Amorós.

Una oferta recent i molt interessant és la de la UABfotomat, que se celebra des de l'any

2013 i que mostra la gran virtut d'adoptar de cadascuna de les altres iniciatives la part més atractiva sense trepitjar-les, satisfent les necessitats que quedaven pendents. Cobreix la possibilitat que es presenti qui vulgui en una categoria específica. En una altra categoria hi poden participar l'alumnat, el professorat i el PAS de la Universitat Autònoma de Barcelona, i sobretot organitza un concurs a la Facultat de Ciències de l'Educació, un centre en què la didàctica és l'element vertebrador i que, per tant, dóna sentit a una activitat d'aquest tipus, aprofundint en l'essència de la idea de la fotografia matemàtica, responent sempre a la pregunta: què hi ha més enllà de la imatge?, quin és el concepte matemàtic i quin és l'aplicació didàctica implícita? Aquesta intenció d'anar més enllà queda palesa en el text amb què es presenten al seu web <http://jornades.uab.cat/uabfotomat>: «Què busquem quan fem una fotografia?», segurament el desig de «capturar» un moment especial, una situació, uns personatges, un lloc que ens inspira, captar a través d'un registre visual alguna cosa que ens interessa. Pensar en una

fotografia matemàtica té aquesta mateixa intenció, el desig de «capturar», en aquest cas, «un contingut matemàtic» que percebem en el nostre entorn. Endinsar-nos en aquest món ens possibilitarà el desenvolupament de molts processos, però un d'especialment rellevant des de l'educació és el creixement d'una mirada diferent, una mirada matemàtica. Mirar matemàticament vol dir ser capaços d'observar i descobrir que el món està ple de situacions, objectes, formes, llocs, que ens permeten connectar idees matemàtiques amb la realitat. Sabem que els plantejaments i desafiaments actuals de l'educació matemàtica ressalten la necessitat de contactar les matemàtiques amb la realitat, amb la finalitat que els estudiants els hi puguin donar sentit, reconèixer-les com una eina que permet interpretar fenòmens o analitzar situacions; és per això que considerem que un bon camí per aprendre a mirar matemàticament és a través de les fotografies. Tot això fa que una fotografia matemàtica pugui esdevenir una eina didàctica potent per a l'aprenentatge i l'ensenyament de les matemàtiques.

Santi Vilches
Institut Arquitecte Manel Raspall

Converses a dues bandes

Anton Aubanell i Sergi Múria

Fa uns quants mesos, vaig demanar a diversos companys matemàtics que em proposessin possibles candidats per dur a terme aquesta secció. Més d'un, de dos i, també, de tres em van suggerir el nom d'Anton Aubanell, professor jubilat de l'Institut Sa Palomera de Blanes i de la Facultat de Matemàtiques de la UB i, sobretot, gran divulgador de les matemàtiques i de la seva didàctica a casa nostra. Quan li vaig proposar de mantenir aquesta conversa, l'Anton, amb l'entusiasme contagiós habitual, va dir ràpidament que sí i també em va proposar com a company de conversa Sergi Múria, alumne seu, amic i continuador de la seva tasca a la Facultat de Matemàtiques i al CESIRE CREAMAT (Departament d'Ensenyament).

Una tarda de principis de primavera, i després d'un bon àpat conjunt, tots tres ens vam tancar en una aula del soterrani de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona. El que podeu llegir a continuació és un resum força fidedigne de la llarga conversa que vam tenir.

Anton: Potser podem començar preguntant o, millor dit, projectant, que és una paraula més matemàtica, com serà l'educació matemàtica del futur. Quin serà el marc on viurà l'educació matemàtica no universitària? Crec que és una bona pregunta per iniciar la reflexió.

Sergi: Podem dir que serà més oberta en diferents aspectes respecte de l'estructura actual.